

09/03/2017

$A \in F^{n \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D^4 = \begin{bmatrix} 3^4 & 0 & 0 \\ 0 & 4^4 & 0 \\ 0 & 0 & 5^4 \end{bmatrix}$$

Υποθέτω ότι υπάρχει $P \in R^{3 \times 3}$ ούτως
με $P^{-1}AP = D$ $\Rightarrow A = PD_1P^{-1}$
όπου

$$A^2 = PD_1P^{-1}PD_1P^{-1} = PD_1^2P^{-1}$$

$$A^{100} = PD_1^{100}P^{-1}$$

κατακρίσιμο
πολ/μο

$$\chi_A(x) = |A - I_3| \in F[x] \quad \text{όταν} \quad A \in F^{3 \times 3}$$

Ορίσμος:

Έστω $f(x) \in F[x]$ πολώνυμο.

Αν $f(x) = c \in F$ λέμε $f(x)$ σταθερό πολ/μο με τιμή c .

(π.χ)

$f(x) = x^3 - 5$ αν σταθερό, $f(x) = \sqrt{2} \in R[x]$ σταθερό μηδενικό πολ/μο. Το σταθερό πολ/μο με τιμή 0.

Έστω $f(x) \neq 0 \in F[x]$. Τότε υπάρχει μηδενικό $n \geq 0$ και $a_0, a_1, \dots, a_n \in F$ με $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 x^0$ και $a_n \neq 0 \in F$. Το n λέγεται βαθμός του $f(x)$.

(π.χ)

Το $f(x) = (3-3)x^3 + 5x^2 + 2 = 5x^2 + 2$ έχει βαθμό 2.

Αν $f(x)$ σταθερό μη μηδενικό πολ/μο, $\deg f(x) = 0$.

Δεν ορίζεται βαθμός του μηδενικού πολ/μού

Το $a_n \in F \setminus \{0\}$ λέγεται ΜΕΓΙΣΤΟΒΑΘΜΙΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ του $f(x)$. Το $f(x)$ λέγεται ΜΟΝΙΜΟ αν $a_n = 1 \in F$.

(n.x) Το $f(x) = x^2 + 2$ είναι μονιμο.

Το $f(x) = 3x - 1$ δεν είναι μονιμο.

Το a_0 λέγεται σταθερός όρος του $f(x)$:

Αν $\lambda \in F$, ορίζουμε $f(\lambda) \in F$ ως εξής

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \in F$$

(n.x) Αν $f(x) = 3x - 1$, τότε $f(0) = -1$, $f(1/3) = 0$.

Το $\lambda \in F$ λέγεται ΡΙΖΑ του $f(x) \in F[x]$ αν $f(\lambda) = 0$.

~~Πρόταση:~~ Αν $f(x), g(x) \in F[x]$ ορίζεται το γινόμενο
 $f(x)g(x) \in F[x]$

(n.x) $(x-1)(x+1) = x^2 - x + x - 1 = x^2 - 1$ (*)

Ορισμός: Έστω $f(x), g(x) \in F[x]$. Λέμε ότι το $f(x)$ ΔΙΑΙΡΕΙ το $g(x)$ στο $F[x]$ αν υπάρχει $h(x) \in F[x]$ με $g(x) = f(x)h(x)$.

(n.x) Από την (*) έχουμε ότι στο $F[x]$
το $x-1$ διαιρεί το x^2-1 και επίσης ότι το $x+1$ διαιρεί
το x^2-1 .

Πρόταση: Έστω F σώμα και $f(x)g(x) \in F[x]$ με $f(x) \neq 0$ δηλ το $f(x)$
δεν είναι το μηδένικό πολ/μο. Τότε υπάρχουν μοναδικά πολ/μοι
 $q(x), r(x) \in F[x]$
και $r(x) = 0$ ή $(r(x) \neq 0$ και $\deg r(x) < \deg f(x))$.

(n.x)

Το $\pi(x)$ λέγεται πηλίκο της διαίρεσης, το $r(x)$ υπόλοιπο

$$\text{Έστω } f(x) = x+1, g(x) = 3x^3+1$$

Να βρεθούν το υπόλοιπο $r(x)$ και το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης του $g(x)$ με το $f(x)$

$3x^3 + 0x^2 + 0x + 1$	$x+1$
$-3x^3 - 3x^2$	$3x^2 - 3x + 3 \leftarrow \text{πηλίκο}$
$-3x^2 + 1$	
$3x^2 + 3x$	
$3x + 1$	
$-3x - 3$	
$-2 \leftarrow \text{υπόλοιπο}$	

$$\text{Άρα } \pi(x) = 3x^2 - 3x + 3$$

$$r(x) = -2$$

Παρατηρούμε ότι γενικά το $f(x)$ διαιρεί το $g(x)$ αν και μόνο αν το $r(x)$ είναι το μηδενικό πολυνο.

Άρα στο (π.χ) το $f(x)$ δεν διαιρεί το $g(x)$ στο $R[x]$

Πρόταση: Έστω $g(x) \in F[x]$ και $\lambda \in F$.

Τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $g(x)$ με το $x-\lambda$ είναι ίσο με $g(\lambda)$

απόδειξη: Υπάρχουν από Ευκλ Αλγόριθμο $\pi(x), r(x) \in F[x]$ με $g(x) = \pi(x) \cdot (x-\lambda) + r(x)$ (*)

και $r(x) = 0$ ή $r(x) \neq 0$ και $\deg r(x) < \deg(x-\lambda) = 1$

Άρα υπάρχει $c \in F$ με $r(x) = c$

Άρα (*) $\rightarrow g(x) = \pi(x)(x-\lambda) + c$

Για $\lambda = x \rightarrow c = g(\lambda)$.

Πρόβλημα: Το $(x-\lambda)$ διαιρεί το $g(x)$ αν και μόνο αν λ ρίζα του $g(x)$

Διαιρεί το $x-1$ το x^5-1 ; Ναι γιατί 1 ρίζα του x^5-1
Διαιρεί το $x+2$ το $x^2+3x-10$; Όχι γιατί -2 όχι ρίζα

Πολυώνυμα Ρίζας

Ορισμός: Έστω $g(x) \in F[x]$. Ένα μηδενικό, $\lambda \in F$

Θα ορίσουμε πολυώνυμο του λ έναν ρίζα του $g(x)$

Θα ισχύει πολυώνυμο $= 0$ αν και μόνο αν λ όχι ρίζα του $g(x)$

και πολυώνυμο ≥ 1 αν και μόνο αν λ ρίζα του $g(x)$

Θα ισχύει πολυώνυμο $\leq$ βαθμό $g(x)$

Βήμα 1: Αν λ όχι ρίζα θέτουμε πολυώνυμο λ έναν ρίζα $= 0$

Βήμα 2: Υποθέτουμε λ ρίζα του $g(x)$. Από το πρόβλημα έχουμε ότι υπάρχει $h(x) \in F[x]$ ώστε $g(x) = (x-\lambda) \cdot h(x)$.

Ορίζουμε αναδρομικά

"Πολυώνυμο λ έναν ρίζα του $g(x)$ " $= 1 +$ "πολ λ έναν ρίζα $h(x)$ "

Έστω π.χ λ έχει πολυώνυμ. ρίζας ως προς $g(x) = 1$

αν και μόνο αν λ ρίζα του $g(x)$ και όχι ρίζα του $h(x)$

Με άλλα λόγια αν θέτουμε $d =$ πολ λ έναν ρίζα του $g(x)$

έχουμε ότι υπάρχει $h_1(x) \in F[x]$ με $h_1(\lambda) \neq 0$ ώστε

$$g(x) = (x-\lambda)^d \cdot h_1(x)$$

Με άλλα λόγια

$$d = \max \{ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ ώστε το } (x-\lambda)^k \text{ διαιρεί το } g(x) \}$$

Εφαρμογή:

17

"Apo"

Emblems

11 Apr 2

$$\begin{cases} a+b+c=0 \end{cases}$$

$$\int a+b+1=0.$$

$$6a^2 - 4b = 0$$

$$\{a^2 + 4(a+1) = 0$$

$$11$$

$$z \Rightarrow \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$\{b=1$$

Ertrags

$$\begin{cases} a+b+1=0 \\ a^2-4b \neq 0 \end{cases}$$

1. Oxidation

Experiencia:

$$x^3 + 0x^2 + 0x - 1$$

X-1

$$-x^3 + x^2$$

$$x^2 - x + 1.$$

$$x^2 - 1$$

$$-x^2 + x$$

x-1

0

$$\text{Kpa} \Rightarrow (x^3 - 1)^2 = (x - 1)^2 (x^2 + x + 1)^2$$

Abou r

Exo 4 e

2. GAN piJa GRO $(x^3-1)^2$.

~* (ΠΑΡΕΥΘ. ΔΥΝΑΜΟ) Έστω $F = \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Αν
 $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in F[x]$, ορίζεται

$$g'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 \in F[x]$$

Επίσης ορίζεται την ε-παράγωγο $f^{(e)}(x) = (f^{(e-1)}(x))'$

(n.x) Αν $f(x) = 3x^2 + 5x$

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = 6x + 5.$$

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = 6$$

Έστω $d \in F$ ρίζα του $g(x)$ πολλαπλ. d .

Πρόταση: Τότε $d = \max \{ r \in \mathbb{Z} \mid \exists \text{ ρίζα του } f(x), f'(x) = f^{(1)}(x), \dots, f^{(r-1)}(x) = f^{(r)}(x) \}$

Επίπεδα: 202. Έστω F σώμα, $g(x) \in F[x]$ πολυβ. βαθμού e ;
 Πόσες το πολύ ρίζες έχει;

~* Έχει το πολύ e ρίζες

απόδειξη: Με επαγωγή στο βαθμό του $g(x)$ και χρίση ότι αν λ ρίζα του $g(x)$ υπάρχει $0 \neq h(x) \in F[x]$. Βαθμός $\leq$ λιγότερο με $g(x) = (x-\lambda)h(x)$.

Μάθε ότι γινόμενο πολυβ στο $F[x]$ έχει περισσότερες το πολύ ρίζες.

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ρίζες του $g(x)$ στο F με $\lambda_i \neq \lambda_j$;

για $i \neq j$ και έστω d_i πολλαπλ. της ρίζας λ_i

Τότε $d_1 + d_2 + \dots + d_r \leq e = \text{βαθμός του } g(x) \quad (*)$

Εφαρμογή: Έστω $0 \neq g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Υποθέτουμε ότι έχει ρίζα το -2 με πολλαπλασιαστή 3 και το 5 με πολλαπλασιαστή 2.
Μπορεί το $g(x)$ να είναι βαθμού 4;

→ Όχι πρέπει βαθμός $g(x) \geq 3+2=5$

Μπορεί το $g(x)$ να είναι βαθμού 5;

→ Ναι, π.χ. $g(x) = (x+2)^3(x-5)^2$.

Παρατηρούμε για $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ μπορεί βίου (*) να μην έχουμε ισότητα.

$$(*) \quad g(x) = (x-1)(x^2+1)$$

ΕΚΘΕΛΙΣΜΟΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ.

Έστω $0 \neq g(x) \in \mathbb{C}[x]$ βαθμού e . Τότε αν $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ οι διακεκριμένες ρίζες του $g(x)$ στο $\mathbb{C}$ και d_i η πολλαπλότητα της ρίζας λ_i , έχουμε $d_1 + d_2 + \dots + d_r = e$.

Με άλλα λόγια, αν $c \neq 0$ ο μεγιστοβαθμικός συντελεστής του $g(x)$, έχουμε $g(x) = c(x-\lambda_1)^{d_1} \dots (x-\lambda_r)^{d_r}$.

Θνλ αν $\deg g(x) \geq 1$, το $g(x)$ είναι γινόμενο $\deg g(x)$ βαθ. 1.

Ορισμός: Έστω F σώμα, και $f(x) \in F[x]$ μη σταθερό πολ/μο. Το $f(x)$ λέγεται ανώτερο αν κάθε μη σταθερό πολ/μο $g(x) \in F[x]$ που διαιρεί το $f(x)$ στο $F[x]$ έχει βαθμό ίσο με το βαθμό της $f(x)$.

Με άλλα λόγια αν $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ στο $F[x]$ τότε $g(x)$ σταθερό ή $h(x)$ σταθερό.

Παράδ. Στο $\mathbb{R}[x]$ το x^2-1 δεν είναι ανάγωγο, γιατί $x^2-1=(x-1)(x+1)$ και $x-1, x+1$ όχι σταθ.

Στο $\mathbb{R}[x]$ το $(x^2+1)^2$ δεν είναι ανάγωγο, γιατί $(x^2+1)^2=(x^2+1)(x^2+1)$.

Στο $\mathbb{R}[x]$ το (x^2+1) είναι ανάγωγο

απόδ. Έστω $g(x), h(x)$ στο $\mathbb{R}[x]$ γν σταθερά με $x^2+1=g(x) \cdot h(x)$

$$\text{Από } 2 = \deg g(x)h(x) = \deg g(x) + \deg h(x)$$

και $g(x), h(x)$ όχι σταθ $\Rightarrow \deg g(x) = \deg h(x) = 1$

Αρα υπάρχουν $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ με $c_1 \neq 0$ ώστε $g(x) = c_1 x + c_2$

Το $g(x)$ έχει ρίζα το $-\frac{c_2}{c_1} \in \mathbb{R}$, άρα και το x^2+1 έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$, αντίφαση.

Πρόταση: Έστω $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ γν σταθερό Τ.Α.Ε.Ι

i.) $f(x)$ ανάγωγο.

ii.) $\deg f(x) = 1$

απόδ. Μεταβ. πρόταση από θεμ. θεωρήματα της Άλγεβρας

Πρόταση: Έστω $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ γν σταθερό Τ.Α.Ε.Ι.

i.) $f(x)$ ανάγωγο

ii.) $\deg f(x) = 1$ ή

($\deg f(x) = 2$ και αρνητική διακρίνουσα).

Πρόταση: Έστω F σώμα και $f(x) \in F[x]$ γν σταθερό

1.) Αν $\deg f(x) = 1$ τότε $f(x)$ ανάγωγο

2.) Αν $\deg f(x) = 2$ ή 3 τότε $f(x)$ ανάγωγο $\Leftrightarrow$ δεν έχει ρίζα στο F

3.) Αν $\deg f(x) \geq 4$ το 2 δεν ισχύει, δηλ. μπορεί ταυτοχρόνως

$f(x)$ όχι ανάγωγο και να γνν έχει ρίζα στο F

(*) $f(x) = (x^2+1)^2 \in \mathbb{R}[x]$